

Trigonometria

- 1) Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:
 $\sin \alpha : \sin \beta = \cos (\alpha + \gamma) : \cos (\beta + \gamma)$,
akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű! (14 pont)
- 2) Jelölje H a $[0; 2\pi[$ intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre teljesül, hogy $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül a $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség.
Adja meg az A halmazt, B halmazt és az $A \setminus B$ halmazt! (13 pont)
- 3) Az \underline{a} és \underline{b} vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:
 $\underline{a}(\cos t; \sin t)$ és $\underline{b}(\sin^2 t; \cos^2 t)$
- a) Adja meg \underline{a} és \underline{b} vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)
- b) Mekkora az \underline{a} és \underline{b} vektorok hajlásszöge $t = \frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)
- c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén \underline{a} és \underline{b} vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)
- 4) Hány $(x; y)$ rendezett valós számpár megoldása van az alábbi egyenletrendszernek, ha x és y is a $[0; 2\pi]$ zárt intervallum elemei?
$$\left. \begin{array}{l} \sin x \cdot \cos y = 0 \\ \sin x + \sin^2 y = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \quad (16 \text{ pont})$$
- 5) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0, x \neq 1$ és $y > 0, y \neq 1$.
$$\left. \begin{array}{l} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \sin(2x + 3y) + \sin(4x + y) = 1 \end{array} \right\} \quad (13 \text{ pont})$$
- 6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
$$\sqrt{\sin^2 x - 4 \sin x + 4} + \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 4} = \sqrt{\sin^2 x + 7 \sin x + 12,25}$$
 (16 pont)
- 7) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$$\left. \begin{array}{l} \log_x (x^2 y^3) + \log_y (x^3 y) = 9 \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = 0 \end{array} \right\} \quad (16 \text{ pont})$$
- 8) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
$$\cos 2x + 4 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$$
 (12 pont)

9)

a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! (5 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
 $2\cos^3 x - 5\cos^2 x - 3\cos x = 0$ (6 pont)

c) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (5 pont)

10) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin x - 2\sin^2 x = \cos^2 x$ (5 pont)

b) $25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$ (7 pont)

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x - \cos^2 x = -1$ (6 pont)

b) $|x - |x|| = 2x + 1$ (7 pont)

12)

a) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok!

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0,2 \\ \frac{\lg x + \lg y}{2} = \lg \frac{x + y}{2} \end{array} \right\}$$
 (6 pont)

b) Oldja meg a $[-\pi; \pi]$ halmazon a $2\sin^2 x - \cos x = 2$ egyenletet! (6 pont)

13) Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\cos x \geq \frac{1}{2}$ (3 pont)

b) $\sqrt{\frac{x}{5}} - 4 < 20$ (4 pont)

c) Hány olyan egész szám van, amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?
 $\log_{0,5}(2x + 100) \geq -8$ (7 pont)